我が国におけるケプラーの第３法則の受容（Ⅳ）

Adoption of the Kepler's Third Law in Japan (Ⅳ)

上原　貞治　　S. Uehara
（茨城県つくば市）

東亜天文学会「天界」2007年5月号掲載

１．ケプラーの第3法則の導出

前稿までの３編にわたる「我が国におけるケプラーの第３法則の受容」（文献1-3）で、ケプラーの第３法則が江戸時代に麻田剛立（1734-1799）によって独立発見された可能性が高いこと、彼の門人の間重富（1756-1816）がこの法則を説明する独自の理論を展開したことを議論した。しかし、間の理論（天行方数諸曜帰一理）は、今日から見ればケプラーの第３法則の数式表現が振り子の周期の法則のそれと似ていることを指摘したものにすぎず、物理学として十分に的を射たものとは言えない。その正しい説明に独自に到達することは当時の日本の学問の背景からは到底不可能なことであり、結局は西洋近代科学の諸原理の輸入を待つほかはなかった。具体的には、この法則の根拠の理解は、高橋至時（1764-1804）の遺志を継いだ幕府天文方のいわゆる「ラランデ暦書」(*Astoronomia of Sterrekunde*, 1773-80. de Lalande の*Astoronomie*　のA.B.Strabbeによるオランダ語訳、文献4）の訳業を通じて行われた。天保の改暦を成し遂げた渋川景佑らの俊才をもってしても力学に関する部分の解読にはそうとう苦戦したようであり、その部分は「新法暦書続編」として弘化三年（1846）にようやく完成した（文献5)。天文方が力学の基礎を持ち合わせていなかったことに加えて、天体の位置の計算方法を改良することを最優先にして研究を行ったこともこの背景にあったのであろう。

一方、当時の暦学者でない者の中には、暦算の観点ではなく今日言うところの物理学的な見地（当時の「窮理」という言葉が今日の「物理学」に近い）から西洋天文学を研究した人々がいた。彼らは、いわゆる蘭学者でオランダ語の文献を読んでそれを翻訳したり、それをもとに一般向けの科学の啓蒙書を書いたりした。そうなると、彼らの興味は計算方法だけではなく宇宙の法則の根源についての説明にも向かうことになる。本稿では、これらの文献の中から志筑忠雄の「暦象新書」と帆足萬理の「窮理通」を取り上げ、その内容にあるケプラーの第３法則の根拠の力学的な説明の部分を議論する。これらは日本で最初にケプラーの第３法則の根拠を西洋近代科学に基づいて説明した文献である。日本人が現象論から発見された法則と西洋で発見された科学原理との関係をどのように理解したかを見る上でたいへん有用

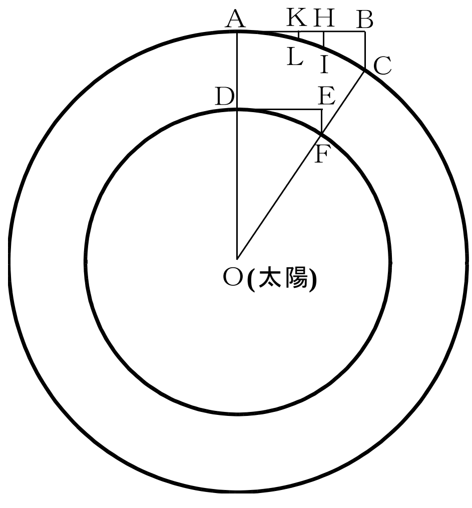
である。数学、天文学、力学の高度の知識を必要とするケプラーの第３法則の導出は、当時の非専門家による研究や啓蒙書の一般レベルをはるかに凌駕しており、そういう意味でこの二書の内容は傑出したものといえる。

２．志筑忠雄の「暦象新書」

志筑忠雄の「暦象新書」の概略とそのケプラーの第３法則の現象論に関する部分については、すでに前々稿（文献2）で紹介したのでここでは省略する。「暦象新書」中編下巻（1803）に「衆動一貫比例起源」と題するケプラーの第３法則の図解による証明がある（文献6）。この部分は、暦象新書の内容の元本、即ち英国人ジョン・ケール（John Keil, 1671-1721)によって18世紀前半に書かれた「物理学・天文学入門」(ラテン語、原題 "*Introductio ad veram physicam et veram astronomiam*" 1725 ）のルロフスによるオランダ語訳（1741）に基づいたものと思われる。以下にその内容を現代的な数式を使って紹介する（原文では数式部分は漢文調の文である)。なお、本稿で扱う惑星の軌道はすべて円軌道である（*注1)。

図のような大小２つの円軌道（惑星の公転軌道）があるとする。そして、それらの軌道半径を、それぞれ、r_2＝ AO、r_1＝ DO　とする（煩雑を避けるために線分や円弧の長さを示す特別な記号を省略するが、図からわかる通り AO, BC などは線分の長さ、AC, DF などは円弧の長さであると理解されたい)。

図のように∠ AOC ＝∠ DOF　となるように点 F をとると、AC:DF ＝ $r_2:r_1$ 。
ただし、AC と DF は無限小弧（すなわち∠ AOC は限りなく小さい）であるとする。
DF=AI となるように点 I をとると、AC:AI ＝ $r_2:r_1$ 。
そうすると（円弧は２次曲線なので近似的に）
BC∶HI = $(AC)^2:(AI)^2 = r_2^2:r_1^2$　が成り立ち、
また、(四辺形 OABC と ODEF の相似性より)
BC∶EF ＝ $r_2 : r_1 = r_2^2 : r_2 r_1$ が成り立つことから、
HI:EF ＝ $r_1^2 : r_2 r_1 = r_1 : r_2$　となる。
今、外側の円軌道上に、HI:KL ＝ $r_2:r_1$となるような点 L をとると、
KL:EF=$r_1 : r_2^2/r_1 = r_1^2 : r_2^2$　である。
また、AL∶AI= $\sqrt{KL} : \sqrt{HI} = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$
ここで、惑星が A から L まで動くのに要する時間を t(A → L)、D から F まで動くのに要する時間を t(D → F)で表せば、この２つの時間は等しい（※）。t(A → L)＝ t(D → F)。



(注：∠ OAB、∠ ABC、∠ AHI、∠ AKL、∠ ODE、∠ DEF は、すべて直角)

また、DF=AI だから、２惑星の速度の比は、
$v_2:v_1$＝ AL:DF = AL:AI= $\sqrt{r_1}:\sqrt{r_2}$ となる。これより、
$t(A \to I):t(D \to F)$＝ $AI/v_2:DF/v_1 = 1/v_2:1/v_1 = v_1:v_2 = \sqrt{r_2}:\sqrt{r_1}$
２惑星の公転周期を P_1, P_2とすると、
$P_2:P_1 = t(A \to I)(2\pi r_2/AI):t(D \to F)(2\pi r_1/DF) = r_2\sqrt{r_2}:r_1\sqrt{r_1}$
これの辺々を２乗してケプラーの第３法則が得られる。
$P_2^2:P_1^2 = r_2^3:r_1^3$ （以上）

数学的には正しいがたいへん長い証明である。しかも、この証明で唯一の物理学的内容を含む部分（※）に対して、「前に見へたり」ということで何の説明も与えられていない。しかもその「前に見へたり」がどこを指すのかもはっきりとしない。もっとも肝心な部分が説明不足になっている。

実は、暦象新書の読者が持つであろうこの疑問は、中編上巻の力学と重力の説明にもどって追っていけば理解できる。そこには、まず「力の大きさ」の説明があり、引力の大きさは落体が一定の時間に落下する距離に比例することが示される。また、重力の大きさは距離の２乗に反比例することも紹介される。それらを受けて、KL:EF ＝ $r_1^2:r_2^2 = 1/r_2^2:1/r_1^2$ が成り立っていることから、２惑星の直線運動からのシフトに相当する距離の比 KL:EF が惑星にかかる太陽の引力の比に一致していることがわかり（*注2）、逆に $t(A \to L)$＝ $t(D \to F)$が導かれるのである。

実はその前の部分で、遠心力が v^2/r に比例し、円軌道の惑星では重力と遠心力が釣り合っていることも紹介されている。それを用いれば重力 F を惑星質量 m で割った量を $f = F/m$ として、（～は異なる惑星間で成り立つ比例関係を表すとして）$f \sim 1/r^2 \sim v^2/r$ と $P \sim r/v$ から、直ちに $P^2 \sim r^3$ が導き出せることを考えると、上の説明は実にまわりくどい。志筑は、同じ中編で地球表面近くの物体にかかる重力と地球の自転による遠心力の関係を論じており、重力と遠心力の釣り合いの計算についてはちゃんと理解しているように見える。志筑自身は、ニュートン力学、万有引力の法則とケプラーの第３法則の関係を理解できていたが、他人に要点をわかりやすく説明できるレベルにまでは達していなかったということであろう。

いずれにしても、暦象新書は、日本で西洋の近代天文学、天体力学を初めて学問的、系統的に紹介した書物である。志筑が何のバックグラウンドもない日本でこれを独力で切り開いていったことを考えると､彼がケプラーの三法則の本質を理解し、正しく日本語に訳すところにまで到達できたことは驚嘆に値する。

*注1：この部分よりも少し前で惑星の楕円軌道が論じられており、惑星の公転周期は、その軌道半長径と同じ半径を持つ円軌道の惑星の周期と同じになることが説明されている。

*注2：正確には、シフトの距離が比例するのは引力ではなく、引力を惑星の質量で割った値（加速度）であるが、暦象新書には加速度の概念が出てこないのでこのへんは多少混同されているようである（*注4参照）。

３．帆足萬里の「窮理通」

帆足萬理（1778-1852）は、豊後国日出藩の家老で、儒学者でありながらオランダ語を勉強して読めるようになった人である。彼は三浦梅園の孫弟子に当たり、梅園が自分の自然哲学の確立に西洋科学の知識を取り入れようとしたことを受け継いで、西洋の自然科学の成果を東洋哲学をベースとして説明することをめざし「窮理通」を著した。窮理通の今回取り上げる部分の執筆年代ははっきりとしないが、その自序にある年号、天保七年(1836）を一応の目安としておく（文献7)。

窮理通の内容は多岐にわたるが、暦学よりも物理学や物質科学に重点が置かれている。そして、ケプラーの第３法則の根拠の説明は、太陽系天体を紹介する「小界第三」の章ではなく重力や電気力を論じた「引力第五上」の章に出てくる。帆足は重力と電気力を同じ原理に基づく力と見ていた。

帆足は、窮理通の天文学に関する部分をおもに志筑の「暦象新書」、蘭書ミュッセンブルック「窮理説」（*Beginsels der Natuurkunde, Boschreeven ten dienst der Landgenooten*, P.van Musschenbroek, 1739)、それに「ラランデ暦書」(前出、オランダ語本）によって書いたとしている。しかし、ケプラーの第３法則の根拠については、その概要の紹介に暦象新書の内容を引用ししつつも、暦象新書にある証明に従っていない。その部分を下に引用する。

又曰く、引力の物に及ぶ、相距たる遠近羃の反比の如し。凡そ視径の濶狭、聲の大小、皆然らざる莫し。是天下の定理なり。西人缺夫列兒（ケプレル)、緯星の日を距たる遠近、及び一周時刻の比例を立て、後人の稱述する所となる。載せて志筑柳圃の暦象新書に在り。然れども缺夫列兒は唯其の法を立つるのみにして、未だ其の理を明らかにすること能はず。且つ載する所の算式、紆回なること已に甚し。西人亦、缺夫列兒の比例、相距遠近羃に原づくと言ふ。然れども未だ其の改定あるを聞かず。今新たに算法を立て、後世をして引力の正理を知らしむ。　（「ケプレル」の振り仮名は筆者による）

帆足は、ケプラーの第３法則が距離の２乗に反比例する万有引力に起源することは、志筑の暦象新書にあるとしているが、その算式は紆回であるとして直接引用していない。前節に見た通り迂遠なのはその通りであるが、帆足の計算方法ははるかに簡略であるもののやはり途中の部分が要領を得ないものになっている。続く部分を以下に引用する。

今二星ありて日を繞ること、図の如し。
仮に内星の日を距たるを以て一と為し外星を二と為す。内星、日の引く所と為りて旋転す。其の一日の行度を（内周／一冪）と為し、外星を（内周／二冪）と為す。然れども是れ日の引力にして、外星に達する者、一日の行度に非ず。外周は内周に倍す。故に再び二約して、一日の行度（内二周／二冪一）を得。内周二段は即ち外周なり。之を変じて、

（外周／相距再乗冪）を外星一日の行度と為し、

（内周／一箇）を内星一日の行度と為す。

右各内外周を乗じて、一周時刻冪を得。

（外周冪／相距再乗冪）　（内周冪／一箇）

（分数については、行の中央に縦棒を引いてその左側に分母、右側に分子を置く和算流の表現が使われているが、ここではそれを（分子／分母）と表現した。図は省略。）

これを現代の数式で表すと、第２節と同じ記号を使って、
$f_1{:}f_2 = 1/r_1^2{:}1/r_2^2 = P_1/r_1^2{:}P_1/r_2^2$　（ただし本例では、$r_1 : r_2 = 1 : 2$　としている）
まではよいとして、その次は要領を得ない。（内周／二冪）の分母分子に２を掛けた上で、分子を外周に置き換えたように見えるが、これは、速度と角速度、周期と周回距離を混同しているようであり正しくない。しかし、結果の「一日の行度」を角速度と解すると、突然、正しい結論である
角速度 $= v/r \sim P/r^3$
が得られている（「再乗冪」とは３乗のこと）。これが得られれば、$P \sim r/v$ だから、あとは後半に明瞭に書かれている通り、$1/P_2{:}1/P_1 = P_2/r_2^3{:}P_1/r_1^3$ より、ケプラーの第３法則、$P_2^2/r_2^3 = P_1^2/r_1^3$　が導かれる。

この要領の得ない部分は、力積が運動量の変化に相当することから得られる式、$\boldsymbol{f}dt = d\boldsymbol{v}$　の両辺を積分することによって得られる関係　$fP \sim v$　に置き換えれば理解できる（*注3）。つまり、
$f_1P_1{:}f_2P_2 = P_1/r_1^2 : P_2/r_2^2 = v_1{:}v_2$、よって　$v/r \sim P/r^3$。
となり、帆足の計算結果の正しさが復活することがわかる。この計算のほうが、円運動の加速度を表す v^2/r が出てこないので直感的にはわかりやすいかもしれない。帆足がこの関係を独自に思いついたのか、あるいは蘭書にあったのを利用したのかは、オランダ語原著を当たっていないので私にはわからない（*注4）。

いずれにしても、帆足萬理にとっても暦象新書の証明はわかりにくかったようで、それほど厳密ではないがより直感に訴えやすいと思われる方法で提示したようである。しかし、帆足の数式は不完全で、他の者がこれを見ても理解できなかったので

はないかと推測される。
なお、窮理通のこれに続く部分には、かなりの分量にわたって地上物体の落下運動についての議論があり、帆足が重力による運動について関心を持っていたことがわかる。

*注3：この積分を比例係数を含めて正しく計算するには $\boldsymbol{f}$ と $d\boldsymbol{v}$ がベクトル量であることに注意をする必要がある。たとえば、$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{v}$ の特定の方向成分を惑星の公転の半周期にわたって積分したとき、$\int \boldsymbol{f}dt=\Delta\boldsymbol{v}$ の関係から　$fP = 2\pi v$ が得られる。

*注4：同じ章で、帆足は、落体に重力が時間的に継続して働くことによって、その速度が時間に比例して増加することを図解している。彼は、運動の法則を（力×時間）が速度の変化に寄与するというイメージで理解していたのではないか。また、ニュートンのプリンキピアでも、運動方程式は、力と加速度ではなく、力と運動量の時間微分との間の比例関係として表現されているという。

４．結論

志筑忠雄は、ケプラー第３法則の根拠となるニュートン力学と法則の導出計算について、その全容を理解していたようである。このことは、暦象新書にそれに必要な全ての論点が現れており、その記述には数式を含めて目立った誤りもないことから推察される。しかし、ケプラーの第３法則の証明がたいへん回りくどいものになっていることから、他人にわかりやすく説明できるほどのレベルにはいたっていなかったようである。
一方、帆足萬里は、より簡略な方法でケプラーの第３法則の証明に挑んだ。帆足の証明の結論は正しいが、途中の部分は厳密でなく正しいものとは言えないようである。
彼らは、運動量や加速度の概念を明示的に導入していないので、ニュートンの運動法則を厳密に計算に持ち込むことができなかったと見られるが、力の意味については「力の大きさと静止状態からスタートしたときの運動距離の比例関係」によって、直感的には正しく理解していたようである。２人ともケプラーの第３法則の根拠を理解したつもりになっていたであろう。
ケプラーの第３法則の証明を数式によって理解することは当時の日本においては最難問ともいえる高度なレベルのものであり、それに挑んだ人は極めて少数であったと推測される。暦象新書と窮理通にあるこれらの記述は、彼らがケプラーの第３法則に感銘を受け、最大限の力を持ってその根拠の理解に挑んだ貴重な記録といえる。

文献：
1）「我が国におけるケプラーの第３法則の受容 ― 麻田剛立の『五星距地之奇法』を中心にして―」上原貞治、天界 Vol. 86, 322-330, 386-390、東亜天文学会、2005.
2）「我が国におけるケプラーの第３法則の受容（Ⅱ）― 麻田剛立『五星距地之奇法』と志筑忠雄『暦象新書』の比較―」上原貞治、天界 Vol.87, 320-328、東亜天文学会、2006.
3）「我が国におけるケプラーの第３法則の受容（Ⅲ）」上原貞治、天界 Vol. 88, 67-73、東亜天文学会、2007.
4)「ラランデ暦書と小出兼政」横塚啓之、天界 Vol. 88, 4-13、東亜天文学会、2007.
5)「洋学」下、日本思想体系、岩波書店 1972（高橋至時「ラランデ暦書管見」1803-04(抄) 所収、解説　広瀬秀雄、中山茂）
6）文明源流叢書第２巻、国書刊行会編　1914　（「暦象新書」1798-1803 所収）.
7）日本科學古典全書第１巻、朝日新聞社　1944（復刻版あり）（「窮理通」所収、解説 三枝博音）.
8）帆足萬里先生全集、２冊、帆足萬里記念図書館、1926.
9)「帆足万里の世界」、狭間久、大分合同新聞社、1993.
10)「江戸時代の日本における基礎科学研究の成果についての概観」、上原貞治、URL=http://www.d1.dion.ne.jp/~ueharas/edokagaku.htm 1999.